MA2 – dodatek k písemné přednášce 18. 5. 2020

Důkazy (nebo aspoň jejich naznačení) některých kritérií konvergence řad z přednášky

(nepovinné čtení, pro zájemce)

1. Srovnávací kritérium konvergence řad

Nechť $0 \leq a_n \leq b_n$ pro všechna $n \in N$, a nechť konverguje $\sum_1^{\infty} b_n$. Pak konverguje i řada $\sum_1^{\infty} a_n$.

Důkaz:

Máme-li ukázat, že řada $\sum_1^{\infty} a_n$ konverguje, máme ukázat, že posloupnost částečných součtů této řady $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$, kde $S_N = \sum_1^N a_n$, má vlastní limitu: víme, že

1) $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ je neklesající posloupnost, neboť

$$S_{N+1} - S_N = a_{N+1} \geqq 0, \text{ tj. } S_N \leqq S_{N+1}, \text{ pro v. } N;$$

2) označíme-li $\{\sigma_N\}_1^{\infty}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_1^{\infty} b_n$, tj. $\sigma_N = \sum_1^N b_n$, pak, z předpokladu věty plyne, že platí

$$S_N = \sum_1^N a_n \leqq \sum_1^N b_n = \sigma_N \text{ pro všechna } N;$$

3) protože $\sum_1^{\infty} b_n$ konverguje, existuje vlastní $\lim_{N\to\infty} \sigma_N = \sigma \in R$, tedy posloupnost $\{\sigma_N\}$ je shora omezená, tj. $\sigma_N \leqq C, C \in R$ pro všechna N přirozená;

Tedy, $\{S_N\}_1^\infty$ je neklesající posloupnost, shora omezená, neboť $S_N \leqq \sigma_N \leqq C$ pro všechna N, a tedy (protože je-li posloupnost neklesající a shora omezená, pak má vlastní limitu) existuje $\lim\limits_{N\to\infty} S_N = S \in R$, což jsme měli ukázat.

2. <u>Limitní srovnávací kritérium konvergence řad</u>

Nechť $a_n \geqq 0$, $b_n > 0$ pro všechna $n \in N$. Pak platí:

a) je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L > 0$, pak: $\sum\limits_1^\infty a_n$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_1^\infty b_n$ konverguje;

b) je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$, pak: $\sum b_n$ konverguje $\Rightarrow$ $\sum a_n$ konverguje;

c) je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$, pak: $\sum a_n$ konverguje $\Rightarrow$ $\sum b_n$ konverguje.

<u>Důkaz</u>

a) <u>$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L > 0$</u> $(a_n \geqq 0, b_n > 0)$ dle definice „znamená“:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0:\ L - \varepsilon < \dfrac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon$;.

zvolme si za $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$ (dle předpokladu $L > 0$), pak k tomuto $\varepsilon = \frac{L}{2}$ existuje $\bar{n}_0$ tak, že pro $n > \bar{n}_0$ je: $\dfrac{L}{2} < \dfrac{a_n}{b_n} < \dfrac{3}{2}L$,

a tedy, protože $b_n > 0$, $\forall n > \bar{n}_0$ odtud dostaneme: $\underset{(n > \bar{n}_0)}{\frac{L}{2} b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2} L b_n}$;

a nyní použijeme srovnávací kritérium 1) (opět máme na mysli poznámku z přednášky, že konvergence řady nezávisí na konečně mnoha členech řady, a tedy pro další část důkazu stačí, že jsme dostali odtud $0 < \frac{L}{2} \cdot b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2} L b_n$ pro $n > \bar{n}_0$):

(i) nechť konverguje řada $\sum_{1}^{\infty} b_n$, pak konverguje i řada $\sum_{n_0+1}^{\infty} b_n$, a tedy i řada $\sum_{n_0+1}^{\infty} \frac{3}{2} L b_n$, a protože $0 \leq a_n \leq \frac{3}{2} L b_n, n > n_0$, dle srovnávacího kritéria konverguje řada $\sum_{n_0+1}^{\infty} a_n$, a tedy (dle poznámky), konverguje i řada $\sum_{1}^{\infty} a_n$;

(ii) nechť konverguje $\sum_{1}^{\infty} a_n$, pak konverguje i $\sum_{n_0+1}^{\infty} a_n$, a protože $0 < \frac{L}{2} b_n \leq a_n$ pro $n > n_0$, srovnávací kritérium říká, že konverguje i řada $\sum_{n_0+1}^{\infty} \frac{L}{2} b_n$, tedy i $\sum_{1}^{\infty} b_n$.

Tedy, z (i) a (ii) dostáváme: $\sum_{1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\sum_{1}^{\infty} b_n$ konverguje.

---

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ $(a_n \geq 0, b_n > 0)$ dle definice je:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0 : -\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon$, vynásobíme-li tuto nerovnost $b_n > 0$, máme: $-\varepsilon b_n < a_n < \varepsilon b_n$ pro $n > n_0$.

Je vidět, že zde můžeme pro srovnávací kritérium 1) použít jen „jeden" odhad, a to $0 \leq a_n < \varepsilon b_n$ pro „nějaké" zvolené $\varepsilon > 0$. Zvolíme-li třeba $\varepsilon = 1$, pro $n > n_0$ máme „přesně" předpoklad srovnávacího kritéria:

$0 \leq a_n < b_n$, $\sum_{n_0+1}^{\infty} b_n$ konverguje $\Rightarrow$ $\sum_{n_0+1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, což jsme měli ukázat.

c) Je-li $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$, a pak tvrzení plyne z b).

Ještě si zkusíme dokázat Cauchyho limitní odmocninové kritérium, tj. srovnání řady s řadou geometrickou (jak bylo snad taky vysvětleno u formulace tohoto kritéria v přednášce):

<u>Cauchyho limitní odmocninové kritérium:</u>

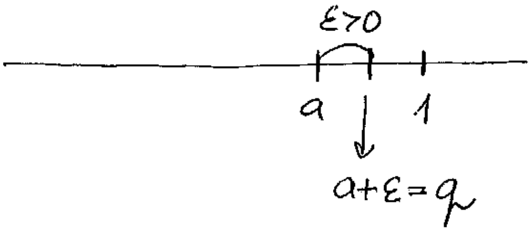
Mějme dánu řadu $\sum_1^\infty a_n$, $a_n \geqq 0$, a nechť $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

Pak: (i) je-li $0 \le a < 1$, řada $\sum a_n$ konverguje, a
(ii) je-li $a > 1$, řada $\sum a_n$ diverguje

<u>Důkaz</u> – opět, jako předchozí důkaz limitního srovnávacího kritéria je důkaz i Cauchyho kritéria „cvičné" na základní srovnávací kritérium.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a < 1 \overset{\text{definice limity}}{\equiv} \forall \varepsilon>0\, \exists n_0\, \forall n>n_0:$

$$a-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < a+\varepsilon$$



← díky tomu, že $a<1$, lze zvolit $\varepsilon>0$ tak, aby $a+\varepsilon<1$ (třeba $\varepsilon = \frac{1-a}{2}$)

pak pro $n>n_0$ (n_0 je pro toto zvolené $\varepsilon>0$) platí:

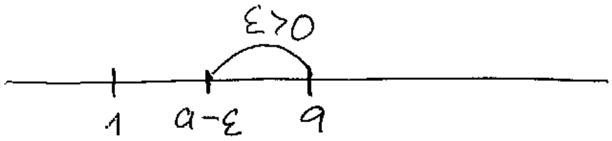
$$\sqrt[n]{a_n} < a+\varepsilon < 1 \quad \text{, tedy}$$

pro $n>n_0$: $0 \le a_n < (a+\varepsilon)^n$, ale $a+\varepsilon<1$, tedy

řada $\sum_1^\infty (a+\varepsilon)^n$ je konvergentní geometrická řada, a srovnávací kritérium pak říká, že i $\sum_1^\infty a_n$ je konvergentní řada, což jsme měli ukázat. (Zde je „vidět" to srovnání s geometrickou řadou „přesně"!)

(ii) když $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a > 1$, pak z definice limity posloupnosti máme:

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n>n_0: \quad a-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < a+\varepsilon$;



a je opět „vidět", že můžeme zvolit $\varepsilon>0$ tak, (když $a>1$), aby $a-\varepsilon>1$;

potom, pro $n>n_0$ (n_0 „patří" ke zvolenému $\varepsilon>0$) je $a_n > (a-\varepsilon)^n > 1$, tedy nemůže být $\lim_{n\to\infty} a_n$ nulová (nutná podmínka konvergence řady), tedy $\sum_1^\infty a_n$ diverguje.

Poznámky:

A nyní už je snad také „vidět", že je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, žádný z odhadů v důkazu (i) i (ii) nemůžeme „udělat", členy řady $\{a_n\}_1^\infty$ mohou být větší než 1, ale i menší než 1, ale když $\lim a_n=1$, nemůžeme je shora odhadnout nerovnicemi čísla $q<1$, tedy pro $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ limitní kritérium „nefunguje".

Cauchyho kritérium (odmocninové) lze ale „silněji" formulovat bez „limit" – najdete v literatuře (což pro naše cíle „obtížné")

A důkaz toho druhého srovnání řady $\sum_1^\infty a_n$ s geometrickou řadou, tj. D'Alembertovo limitní kritérium, dokazovat nebudeme (princip důkazu je stejný, jen „technicky" došlo se k odhadům v (i) $0<a_n\le q^n$, $q<1$ nebo v (ii) $a_n\ge 1 \Rightarrow \lim a_n\neq 0$ je technicky trochu náročnější (opět – zájemci najdou v literatuře).

A na závěr si ukážeme, že Leibnizovo kritérium pro neabsolutní konvergenci alternující řady $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, $a_n \geq 0$ se dokáže zcela analogicky tomu, jak jsme řešili před vyslovením tohoto kritéria příklad, kde jsme ukázali, že $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konverguje:

Kritérium Leibnizovo

Mějme řadu $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, $a_n \geq 0$ $\forall n \in N$; pak, pokud platí

(i) posloupnost $\{a_n\}_1^{\infty}$ je nerostoucí a

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

je $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ je konvergentní řada.

Důkaz: (i) $S_{2k} = \underbrace{(a_1-a_2)}_{\geq 0} + \underbrace{(a_3-a_4)}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{(a_{2k-1}-a_{2k})}_{\geq 0} \geqslant 0$, $k \in N$

a $\{S_{2k}\}$ je neklesající posloupnost $\left((a_{2j-1}-a_{2j}) \geq 0\right)$ (neboť $\{a_n\}$ je nerostoucí)

(ii) $S_{2k} = a_1 - \underbrace{(a_2-a_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(a_4-a_5)}_{\geq 0} - \dots - (a_{2k-2}-a_{2k-1}) - \underbrace{a_{2k}}_{\geq 0}$

$\Rightarrow 0 \leqslant S_{2k} \leq a_1$, tedy $\{S_{2k}\}$ je omezená shora;

z (i) a (ii) plyne, že $\{S_{2k}\}$ (omezená shora neklesající posloupnost) má vlastní limitu, $\lim_{k\to\infty} S_{2k} = S \in R$;

(iii) $S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1}$, $\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} S_{2k} + \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = S + 0$!

tedy závěr: protože $\lim_{k\to\infty} S_{2k} = \lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = S \Rightarrow \sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = S \in R$

(tj. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ je konvergentní řada)